

Афанасьев В.А., Балоев А.А., Мещанов А.С., Туктаров Э.А.

УПРАВЛЕНИЕ СБЛИЖЕНИЕМ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С АСТЕРОИДОМ ЗА НАЗНАЧЕННОЕ ВРЕМЯ

Введение

Как правило, астероиды в своём орбитальном поступательном движении совершают вращательное движение. Поэтому становится важной сторона астероида, с которой произойдёт сближение беспилотного летательного аппарата (БЛА) для установки зондирующей аппаратуры. Возникает постановка задачи управления сближением за назначенное время.

Математическая модель совпадает с представленными в [1] уравнениями движения по скорости V , расстоянию h между БЛА и астероидом, а также выражениями суммарной тяги ракетных двигателей (РД) и массы БЛА с равномерным расходом топлива.

Постановка задачи сближения за назначенное время

Требуется установить закон управления разгоном – торможением поступательного движения БЛА из начального состояния:

$$t = t_0 = 0, V(t_0) = V_0 = 0, h(t_0) = h_0, m(t_0) = m_0 \quad (1)$$

в заданное конечное:

$$V(t_k) = V_k = 0, h(t_k) = h_k = 0 \quad (2)$$

за назначенное время: $t = t_k - t_0$.

Решение задачи сближения за назначенное время

При решении задачи сближения в [1] закон управления определялся двумя моментами времени: моментом переключения и моментом сближения. Теперь при задании момента сближения необходимо иметь дополнительный управляющий параметр. Это достигается введением паузы в работе двигателя между разгоном и торможением, протяжённость которой определяется моментом окончания разгона t_1 и началом торможения t_2 .

Таким образом, траектория сближения формируется из трёх интервалов: разгон $t \in [t_0, t_1)$, пауза $t \in [t_1, t_2)$ и торможение $t \in [t_2, t_3]$.

Рассмотрим полуинтервал разгона, $t \in [t_0, t_1)$. Первый полуинтервал движения совпадает с рассмотренным в [1], и для него получены выражение для скорости:

$$V_1 = -P_{sp} g \ln \frac{m_1}{m_0} = -P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1) \quad (3)$$

и выражение для расстояния

$$h_1 = h_0 - \frac{P_{sp} g}{\beta} [(1 - \beta t_1) \ln(1 - \beta t_1) + \beta t_1]. \quad (4)$$

Рассмотрим полуинтервал паузы, $t \in [t_1, t_2)$. Поступательное движение на нём описывается уравнениями:

$$\dot{V} = 0, \quad \dot{h} = -V, \quad (5)$$

с начальными условиями (3), (4). Из первого уравнения (5) получаем:

$$V = \text{const} = V_1 = -P_{sp} g \ln \frac{m_1}{m_0} = -P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1). \quad (6)$$

Интегрируем второе уравнение (5) с учётом (4):

$$h = h_1 + P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1)(t - t_1). \quad (7)$$

В конце второго отрезка имеем выражение для скорости:

$$V_2 = -P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1) \quad (8)$$

и выражение для расстояния:

$$h_2 = h_1 + P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1)(t_2 - t_1). \quad (9)$$

В уравнение (9) подставим уравнение (4):

$$h_2 = h_0 - \frac{P_{sp} g}{\beta} [(1 - \beta t_1) \ln(1 - \beta t_1) + \beta t_1] + P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1)(t_2 - t_1).$$

С учётом представления логарифмических функций рядами с одним членом разложения получаем выражение для расстояния в конце второго отрезка трёхсоставной траектории:

$$h_2 = h_0 - P_{sp} g \beta t_1^2 - P_{sp} g \beta t_1(t_2 - t_1). \quad (10)$$

Рассмотрим отрезок торможения, $t \in [t_2, t_3]$. Поступательное движение при торможении описывается уравнением:

$$m \dot{V} = \dot{m} P_{sp} g, \quad (11)$$

с начальными условиями (8), (10). Интегрирование уравнения (11) с учётом начального условия (8) даёт выражение для текущей скорости сближения на заключительном отрезке траектории сближения:

$$V = -P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1) + P_{sp} g \ln \frac{m}{m_2}. \quad (12)$$

В конце третьего отрезка получаем выражение для скорости:

$$V_3 = -P_{sp} g \ln(1 - \beta t_1) + P_{sp} g \ln \frac{m_3}{m_2},$$

которое с учётом конечных условий (2) становится уравнением:

$$-P_{sp}g \ln(1 - \beta t_1) + P_{sp}g \ln \frac{m_3}{m_2} = 0, \quad (13)$$

где оставшаяся масса БЛА определяется выражением:

$$m_3 = m(t_3) = m_2 - |\dot{m}|(t_3 - t_2).$$

Масса БЛА на втором отрезке не изменяется и на его конце равна массе БЛА в конце первого отрезка:

$$m_2 = m_1 = m_0 - |\dot{m}|t_1.$$

Подстановка последнего соотношения в предпоследнее даёт выражение:

$$m_3 = m_0 - |\dot{m}|(t_3 - t_2 + t_1). \quad (14)$$

Подставим предпоследнее выражение и последнее (14) в уравнение (13):

$$-P_{sp}g \ln(1 - \beta t_1) + P_{sp}g \ln \frac{m_0 - |\dot{m}|(t_3 - t_2 + t_1)}{m_0 - |\dot{m}|t_1} = 0.$$

После деления числителя и знаменателя логарифмической функции на массу m_0 получаем уравнение:

$$-\ln(1 - \beta t_1) + \ln \frac{1 - \beta(t_3 - t_2 + t_1)}{1 - \beta t_1} = 0,$$

которое после несложных преобразований приводит к зависимости между всеми тремя моментами времени, определяющими искомый закон управления:

$$-t_3 + t_2 = -t_1 + \beta t_1^2. \quad (15)$$

Интегрируем уравнение $\dot{h} = -V$ с учётом скорости сближения (12):

$$dh = -\left(-P_{sp}g \ln(1 - \beta t_1) + P_{sp}g \ln \frac{m}{m_2}\right)dt.$$

Подстановка выражений для m и m_2 приводит к уравнению:

$$dh = P_{sp}g \ln(1 - \beta t_1)dt - P_{sp}g \ln \frac{1 - \beta t_2 - \beta(t - t_2)}{1 - \beta t_2}dt.$$

Это уравнение представим в виде:

$$dh = P_{sp}g \ln(1 - \beta t_1)dt - P_{sp}g \{\ln[1 - \beta t_2 - \beta(t - t_2)] - \ln(1 - \beta t_2)\}dt,$$

после чего решение уравнения сводится к вычислению интеграла:

$$h = h_2 + P_{sp}g \ln[(1 - \beta t_1)(1 - \beta t_2)](t - t_2) - P_{sp}g \int_{t_2}^t \ln[1 - \beta t]dt. \quad (16)$$

Вычисление интеграла даёт:

$$\int_{t_2}^t \ln(1 - \beta t)dt = -\frac{1}{\beta} [\ln(1 - \beta t)(1 - \beta t) - \ln(1 - \beta t_2)(1 - \beta t_2) + \beta(t - t_2)].$$

Это выражение подставим в (16):

$$h = h_2 + P_{sp} g \ln[(1 - \beta t_1)(1 - \beta t_2)](t - t_2) + P_{sp} g \frac{1}{\beta} [\ln(1 - \beta t_1)(1 - \beta t_2) - \ln(1 - \beta t_2)(1 - \beta t_2) + \beta(t - t_2)]. \quad (17)$$

В конце сближения получаем выражение:

$$h_3 = h_2 + P_{sp} g [\ln(1 - \beta t_1) + \ln(1 - \beta t_2)](t_3 - t_2) + P_{sp} g \frac{1}{\beta} [\ln(1 - \beta t_3)(1 - \beta t_3) - \ln(1 - \beta t_2)(1 - \beta t_2) + \beta(t_3 - t_2)].$$

Подстановка выражения (10) даёт:

$$h_3 = h_0 - P_{sp} g \beta t_1^2 - P_{sp} g \beta t_1(t_2 - t_1) + P_{sp} g [\ln(1 - \beta t_1) + \ln(1 - \beta t_2)](t_3 - t_2) + P_{sp} g \frac{1}{\beta} [\ln(1 - \beta t_3)(1 - \beta t_3) - \ln(1 - \beta t_2)(1 - \beta t_2) + \beta(t_3 - t_2)].$$

После замены логарифмических функций рядами с одним членом разложения получаем уравнение:

$$h_3 = h_0 - P_{sp} g \beta t_1^2 - P_{sp} g \beta t_1(t_2 - t_1) + P_{sp} g [-\beta t_1 - \beta t_2](t_3 - t_2) + P_{sp} g \frac{1}{\beta} [-\beta t_3(1 - \beta t_3) + \beta t_2(1 - \beta t_2) + \beta(t_3 - t_2)],$$

которое после несложных преобразований принимает вид:

$$t_k - t_2 - t_1 + \frac{h_0}{P_{sp} g \beta t_k} = 0, \quad (18)$$

где $t_k = t_3$ – заданное время сближения. Из соотношения (15) выразим момент t_2 :

$$t_2 = t_k - t_1 + \beta t_1^2, \quad (19)$$

и его выражение подставим в уравнение (18):

$$t_k - t_k + t_1 - \beta t_1^2 - t_1 + \frac{h_0}{P_{sp} g \beta t_k} = 0.$$

После преобразований получаем формулу для вычисления момента отключения двигателя после разгона

$$t_1 = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{h_0}{P_{sp} g t_k}}. \quad (20)$$

Формулу для вычисления момента включения двигателя после паузы получим, подставив выражение (20) в соотношение (19):

$$t_2 = t_k - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{h_0}{P_{sp} g t_k}} + \frac{1}{\beta} \frac{h_0}{P_{sp} g t_k},$$

которую запишем в виде:

$$t_2 = t_k - \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{h_0}{P_{sp} g t_k}} \left(1 - \sqrt{\frac{h_0}{P_{sp} g t_k}} \right). \quad (21)$$

Формулы (20), (21) определяют моменты времени t_1 и t_2 , составляющие структуру закона управления сближением БЛА с астероидом за назначенное время.

Пример

Пусть продолжительность сближения задана равной $t_k=22$ с. Тогда по формуле (20) вычисляем первый управляющий параметр:

$$t_1 = \sqrt{\frac{100}{300 \cdot 9,81 \cdot 0,004^2 \cdot 22}} = 9,825 \text{ с},$$

по которому происходит переключение силы тяги на противоположную по направлению, а по формуле (21) вычисляем второй управляющий параметр искомого закона управления:

$$t_2 = 22 - \frac{1}{0,004} \sqrt{\frac{100}{300 \cdot 9,81 \cdot 22}} (1 - 0,039300) = 12,561 \text{ с},$$

определяющий момент окончания сближения.

Продолжительность паузы составляет 2,7 с, в течение которых необходимо провести угловой разворот БЛА, чтобы для торможения использовать тягу одного двигателя.

Заключение

На основе аналитического решения дифференциальных уравнений поступательного движения с учётом динамики выгорания топлива получены выражения для расчёта момента переключения двигателя с разгона на торможение и момента сближения, которые являются программными управляющими параметрами в законе управления сближением БЛА с астероидом. Получены формулы для вычисления управляющих параметров в законе управления сближением за назначенное время, с помощью которого можно выбирать нужную сторону астероида для контакта с ним.

Полученные результаты представляют собой удобный инструмент при выборе основных проектных параметров БЛА и его двигателя, а также при проектировании бортовых алгоритмов, в частности, для построения программных траекторий движения центра масс при сближении.

Публикация осуществлена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-48-02040.

Библиографический список

1. Афанасьев В.А., Балоев А.А., Мещанов А.С., Туктаров Э.А. Управление сближением беспилотного летательного аппарата с астероидом. Сборник трудов XX Всероссийского семинара по управлению движением и навигации летательных аппаратов: Часть I. Самара, 14-16 июня 2017 г. – Самара, АНО «Изд-во СНЦ», 2018. – С. 9.